UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

CENTRE DE RECHERCHE SUR LES TRANSPORTS

CASE POSTALE 6128, SUCCURSALE A, MONTRÉAL, QUÉBEC, H3C 3J7

UNE NOUVELLE FORMULATION DU PROBLÈME DE STEINER SUR UN GRAPHE

par

Armin Claus* et Nelson Maculan**

* Concordia University, Montréal

** Université Fédérale de Rio de Janeiro, Brésil
et Université de Montréal

- Cette recherche a été financée partiellement par le Conselho Nacional de Desenvolvimento Cientifico e Tecnológico (Brésil), contrat CNPq 200795-81.

- Ce rapport a été publié grâce à une subvention du fonds F.C.A.C. pour l'aide et le soutien à la recherche.

Université de Montréal

Centre de recherche sur les transports - Publication #280
Département d'informatique et de
recherche opérationnelle - Publication #465

Janvier 1983

Dépôt légal - 1er trimestre 1983

RÉSUMÉ

La formulation du problème de Steiner sur un graphe que nous présentons est basée sur un problème de multiflots non-simultanés où un sommet obligatoire est choisi comme source et les autres sommets obligatoires jouent le rôle des puits.

- - - - - - - - - - - - - - -

DEFINITION DU PROBLEME

Soit $G=(S,A)$ un graphe non-orienté connexe dont chaque arête $a \in A$ est munie d'une longueur $\ell_a > 0$. L'ensemble des sommets S est partitionné en deux sous-ensembles: S_o, l'ensemble des sommets obligatoires et S_f, l'ensemble des sommets facultatifs ou points de Steiner.

Le problème de Steiner sur le graphe G ("Steiner Network Problem") consiste à déterminer un graphe partiel de G, $G'=(S',A')$ où $S' \subseteq S$ et $A' \subseteq A$, de longueur totale minimale, permettant de relier entre eux tous les sommets de S_o en utilisant, éventuellement, un ou plusieurs sommets facultatifs.

GÉNÉRALITÉS

Le problème de Steiner sur un graphe est classé comme un problème NP-complet, voir Lawler (1976), page 8. Pour une étude plus approfondie du problème nous renvoyons le lecteur aux références suivantes: Hakimi (1971), Dreyfus et Wagner (1972) et Gilbert et Pollak (1968).

NOUVELLE FORMULATION

Prenons le graphe $G=(S,A)$ et remplaçons-le par son graphe orienté symétrique équivalent $G_d=(S_d,A_d)$, c'est-à-dire, $S_d=S$ et A_d est formé de la manière suivante: si $a=[i,j] \in A$, alors $(i,j) \in A_d$ et $(j,i) \in A_d$. A (i,j) et à (j,i) nous associons la même longueur ℓ_a : $\ell_{ij} = \ell_{ji} = \ell_a > 0$.

Un sommet de S_o, par exemple s, sera choisi comme source et les sommets qui appartiennent à $S_o - \{s\}$ joueront le rôle des puits, nous allons

considérer par la suite un problème de multiflots non-simultanés.

Soient Γ_i^+ l'ensemble des sommets successeurs de i et Γ_i^- l'ensemble des sommets prédécesseurs de i.

Soit x_{ij}^k le flux dans l'arc (i,j), appartenant au flot qui va de la source s au puits $k \in S_o - \{s\}$.

Le problème (P) suivant, où y_{ij} sera égal à 1 si l'arc (i,j) appartient à la solution voulue ou égal à 0 dans le cas contraire, fournit une solution du problème de Steiner sur le graphe G.

Le problème (P):

$$\text{minimiser} \sum_{(i,j)\in A_d} \ell_{ij}\, y_{ij}$$

sous les contraintes

$$\left.\begin{array}{ll}
\sum_{j\in\Gamma_i^+} x_{ij}^k - \sum_{j\in\Gamma_i^-} x_{ji}^k = 0 & \forall\, i \in S - \{s,k\} \\
\sum_{j\in\Gamma_s^+} x_{sj}^k - \sum_{j\in\Gamma_s^-} x_{js}^k = 1 & \\
\sum_{j\in\Gamma_k^+} x_{kj}^k - \sum_{j\in\Gamma_k^-} x_{jk}^k = -1 & \\
0 \le x_{ij}^k \le y_{ij} & \forall\, (i,j) \in A_d \\
y_{ij} \in \{0,1\} & \forall\, (i,j) \in A_d \,.
\end{array}\right\} \; k \in S_o - \{s\}$$

Nous pouvons vérifier que si $y_{ij} = 1$ pour une solution optimale de (P) alors $y_{ji} = 0$.

La solution de (P) nous fournit une arborescence de racine s sur G_d qui correspond à un arbre solution du problème de Steiner sur G.

COMMENTAIRES SUR LA SOLUTION DE (P)

Si nous remplaçons les contraintes du type $y_{ij} \in \{0,1\}$ par $y_{ij} \geq 0$, nous avons un nouveau problème (P'). Est-ce qu'une solution de base optimale de (P') sera totalement entière? Si la réponse est affirmative, cette solution résoud aussi (P).

Les contraintes du type $x_{ij}^k \leq y_{ij}$ peuvent être écrites sour la forme suivante:

$$x_{ij}^k - y_{ij} + t_{ij}^k = 0 \quad \text{où} \quad t_{ij}^k \geq 0 \quad \text{est une variable d'écart.}$$

Si A est la matrice d'incidence sommets-arcs du graphe G_d, alors les contraintes de (P') seront représentées par la matrice M suivante:

$$M = \left[\begin{array}{c:c:c} A & & \\ A & & \\ A & & \\ \vdots & & \\ A & & \\ \hdashline I & -I & I \\ I & -I & I \\ I & -I & I \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ I & -I & I \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} Q & \\ \hdashline K & S \end{array}\right]$$

Propriété 1

Q, K et S sont totalement unimodulaires.

Propriété 2

M n'est pas totalement unimodulaire.

Propriété 3

On peut enlever une ligne de chaque matrice A sans que le rang de A soit modifié.

Les propriété décrites ci-dessus peuvent être démontrées: la propriété 1 est immédiate, voir Lawler (1976), la propriété 3 vient du fait que le rang de A est égal à $|S_d|-1$. Pour ce qui concerne la propriété 2, nous pouvons former une sous-matrice de M pour laquelle le théorème de Ghouila-Houri (1962) n'est pas vérifié.

D'après la propriété 3, chaque matrice A de Q peut être remplacée par la matrice A, dérivée de A quand on enlève de cette dernière une ligne quelconque. Sans perte de généralité, nous pouvons enlever la dernière ligne de chaque matrice A de Q:

$$M_1 = \begin{bmatrix} Q_1 & \\ K & S \end{bmatrix} \qquad \text{où } Q_1 = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_1 & & \\ & & A_1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & A_1 \end{bmatrix}$$

Considérons une partition de $M_1 = [BN]$ où B est une matrice carrée. Représentons B de la manière suivante:

$$B_1 = \left[\begin{array}{c:c} Q_1' & \\ \hdashline K' & S' \end{array}\right]$$

où Q_1', K' et S' sont formées à partir des colonnes de Q_1, K et S respectivement.

Propriété 4

Si Q_1' est carrée, alors det $B \in \{-1,0,+1\}$.

Démonstration

B et Q' sont carrées, alors S' est carrée; det Q_1' et det S' appartiennent à $\{-1,0,+1\}$, cela implique

$$\det B = (\det Q_1')\ (\det S') \in \{-1,0,+1\} . \qquad \square$$

Prenons

$$Q_1' = \begin{bmatrix} A_1^1 & & & & \\ & A_1^2 & & & \\ & & A_1^3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A_1^{|S_0|-1} \end{bmatrix}$$

où les A_1^i, $i \in \{1,2,\ldots,|S_0|-1\}$ sont formées à partir des colonnes de A_1.

Propriété 5

Si B est inversible, le nombre minimum de colonnes de chaque matrice A_1^i, pour $i \in \{1,2,\ldots,|S_o|-1\}$, est égal à $|S_d|-1$.

Propriété 6

Si Q_1' est carrée, alors chaque A_1^i possède $|S_d|-1$ colonnes associées à un arbre de G_d.

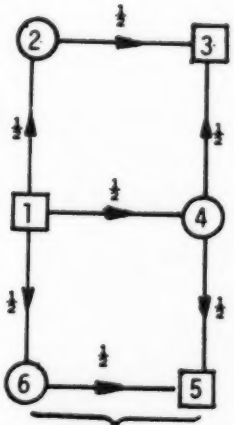
Les propriétés 5 et 6 sont immédiates.

EXPÉRIENCE NUMÉRIQUE

Les auteurs ont réalisé des expériences numériques pour la solution de (P') pour des problèmes de petite taille. Tous les résultats ont satisfait les contraintes d'intégralité ($y_{ij} \in \{0,1\}$).

Les auteurs n'ont pas encore rencontré un contre-exemple pour le cas où (P') ne résoud pas (P).

Supposons qu'une solution optimale de (P') soit

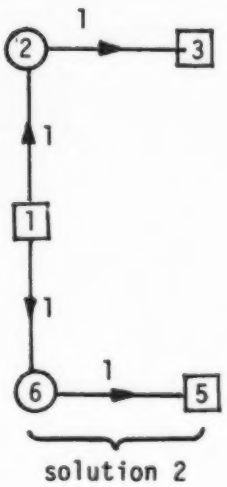


solution 1

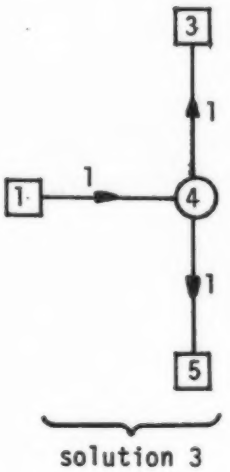
$y_{12} = y_{23} = y_{16} = y_{14} = y_{43} = y_{45} = y_{65} = \frac{1}{2}$

où $S_o = \{1,3,4\}$, 1 joue le rôle d'une source et $\{2,4,6\} \subseteq S_f$.

La solution 1 n'est pas de base puisqu'elle peut être représentée comme étant une combinaison linéaire convexe des solutions 2 et 3 ci-dessous:



solution 2



solution 3

Nous pouvons écrire les solutions 1, 2 et 3 de manière complète comme ci-dessous:

	solution 1	solution 2	solution 3
x^3_{12}	1/2	1	0
x^3_{16}	0	0	0
x^3_{14}	1/2	0	1
x^3_{23}	1/2	1	0
x^3_{65}	0	0	0
x^3_{43}	1/2	0	1
x^3_{45}	0	0	0
x^5_{12}	0	0	0
x^5_{16}	1/2	1	0
x^5_{14}	1/2	0	1
x^5_{23}	0	0	0
x^5_{65}	1/2	1	0
x^5_{43}	0	0	0
x^5_{45}	1/2	0	1
y_{12}	1/2	1	0
y_{16}	1/2	1	0
y_{14}	1/2	0	1
y_{23}	1/2	1	0
y_{65}	1/2	1	0
y_{43}	1/2	0	1
y_{45}	1/2	0	1

Cela veut dire que

(solution 1) = 1/2 (solution 2) + 1/2 (solution 3).

RÉFÉRENCES

DREYFUS, S.E. et WAGNER, R.A. (1972) "The Steiner Problem in Graphs", Networks 1, p. 195-207.

GHOUILA-HOURI, A. (1962) "Caractérisation des matrices totalement unimodulaires", C.R. Acad. Sc. Paris, p. 1192.

GILBERT, E.N. et POLLAK, H.O. (1968) "Steiner Minimal Trees", SIAM Journal for Applied Mathematics, Vol. 16, No 1, p. 1-29.

HAKIMI, S.L. (1971) "Steiner's Problem in Graphs and its Implications", Networks 1, p. 113-133.

LAWLER, E.L. (1976) "Combinatorial Optimization: Networks and Matroids", Holt, Rinehart and Winston.